ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ

FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ

MATEMATİK BÖLÜMÜ

2020-2021 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 314 KOMPLEKS FONKSİYONLAR TEORİSİNE GİRİŞ QUİZ SORULARI

1) $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y \neq 0$ olan koşulları bulunuz. Bu koşullar altında

$$\frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y} \quad \ldots (*)$$

ifadesini $a+ib$ şeklinde yazınız.

2) $a, b \in \mathbb{C}$, $|a|<1$ ve $|b|<1$ ise $c = \dfrac{\left(1-|a|^2\right)b + \left(1-|b|^2\right)a}{1-|ab|^2}$ olmak üzere $|c|<1$ olduğunu gösteriniz.

3) $\log(-3+3i)$, $(1+i)^{1+i}$, $\sqrt{8+6i}$ değerlerini bulunuz.

4) $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) \leq \dfrac{1}{2} \right\}$ kümesini belirtip çiziniz. A' kümesini (A nın yığılma noktaları kümesi) bulunuz.

Not: Sınav **21.04.2021** Çarşamba günü **10:15-11:45** arasında gerçekleşecektir. Süre 90 dakikadır. E-posta yoluyla iletilen ve zamanında teslim edilmeyen cevaplar değerlendirilmeyecektir. Başarılar

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

MAT314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ, QUİZ ÇÖZÜMLER

① $x,y \in \mathbb{R}$ olsun. $\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 0 \Rightarrow \cos x = 0$ ve $\sinh y = 0$

$\Rightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ ve $y = 0$ dır.

Dolayısıyla bu noktalar dışında (*) ifadesi tanımlıdır.

$$\frac{\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y}{\cos x \cosh y - i \sin x \sinh y} = \frac{(\sin x \cosh y + i \cos x \sinh y)(\cos x \cosh y + i \sin x \sinh y)}{(\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2}$$

$$= \frac{\sin x \cos x (\cosh^2 y - \sinh^2 y) + i(\cos^2 x + \sin^2 x)\sinh y \cosh y}{(\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2}$$

$$= \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{2\left[(\cos x \cosh y)^2 + (\sin x \sinh y)^2\right]}$$

$$= \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{(1+\cos(2x))\cosh^2 y + (1-\cos(2x))\sinh^2 y}$$

$$= \frac{\sin(2x) + i \sinh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$

② $a,b \in \mathbb{C}$, $|a|<1$, $|b|<1$ olsun.

$$|c| \le \frac{(1-|a|^2)|b| + (1-|b|^2)|a|}{1-|ab|^2}$$

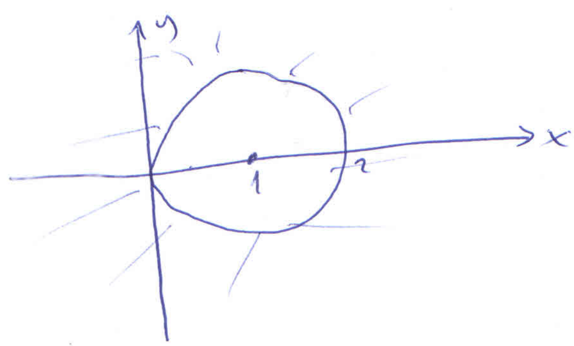
$$= \frac{|a|+|b| - |ab|(|a|+|b|)}{1-|ab|^2}$$

$$= \frac{(|a|+|b|)(1-|ab|)}{(1+|ab|)(1-|ab|)} = \frac{|a|+|b|}{1+|a|\cdot|b|} < 1 \Rightarrow |c| < 1 \text{ bulunur.}$$

④ $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \le \frac{1}{2}\}$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$\operatorname{Re}(\frac{1}{z}) \le \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow (x^2-2x)+y^2 \ge 0 \Rightarrow$

$(x-1)^2+y^2 \ge 1^2$,



A, $M(1,0)$, $r=1$ olan dairenin dışıdır.

$\bar{A} = A$, $A' = A$.

③ 1) $\log(-3+3i) = \ln|-3+3i| + i(\arg(-3+3i) + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$

$z = -3+3i$, $|z| = 3\sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{-3}{3\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\theta = \frac{-\pi}{4}$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$

$\log(-3+3i) = \ln 3\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2) $(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\log(1+i)} = e^{(1+i)(\ln|1+i| + i\arg(1+i) + 2k\pi i)}$

$= e^{(1+i)(\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi))}$

$= e^{\ln\sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2k\pi) + i\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)}$

$= e^{\ln\sqrt{2} - (\frac{\pi}{4} + 2k\pi)} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2k\pi)}$

$= e^{\ln\sqrt{2} - \frac{\pi}{4} - 2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} + 2k\pi\right)\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

3) $a = 8+6i$, $\sqrt{a} = \sqrt{8+6i} = z = ?$

$|8+6i| = 10$, $\cos\theta = \frac{8}{10}$, $\sin\theta = \frac{6}{10}$ $\Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5}$, $\sin\theta = \frac{3}{5}$

$z_k = (10)^{1/2} \cdot \left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{2} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{2}\right)$, $k = 0, 1$

$z_0 = \sqrt{10} \cdot \left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{10}\left(\frac{3}{\sqrt{10}} + i\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = 3+i \Rightarrow \boxed{z_0 = 3+i}$

$z_1 = \sqrt{10}\left[\cos\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\theta}{2}\right)\right] = \sqrt{10}\left[-\cos\frac{\theta}{2} - i\sin\frac{\theta}{2}\right]$

$= \sqrt{10}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}} - i\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -(3+i) \Rightarrow \boxed{z_1 = -3-i}$

($\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) \Rightarrow \sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$, $\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$

$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\frac{4}{5}}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \boxed{\cos\frac{\theta}{2} = \frac{3}{\sqrt{10}}}$, $\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\frac{4}{5}}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow$

$\boxed{\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{10}}}$

)